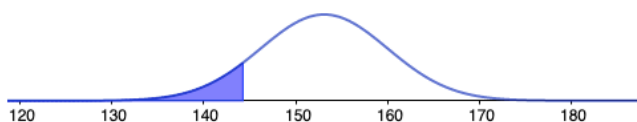


9.1

- a) Merkitään satunnaisesti valitun tytön pituutta senttimetreinä kirjaimella X . On määritettävä raja, jonka alapuolella on 10 % pituuksista, eli sellainen pituus a , että $P(X < a) = 0,10$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyyslaskurilla.

$$\mu = 153.1 \quad \sigma = 6.9$$



Normaalijakauma



μ

153.1

σ

6.9



$P(X \leq$

144.25729

) =

0.10



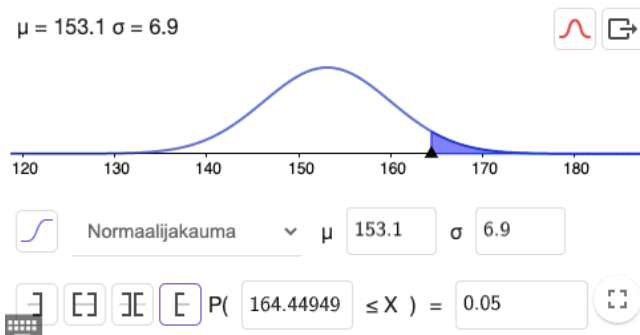
$$P(X < a) = 0,10, \text{ kun } a \approx 144$$

Lyhimmät 10 % tytöistä ovat alle 144 cm pitkiä.

- b) On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 5 % pituuksista, eli sellainen pituus a , että $P(X > a) = 0,05$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

$\mu = 153.1$ $\sigma = 6.9$



$$P(X > a) = 0,05, \text{ kun } a \approx 164$$

Pisimmät 5 % tytöistä ovat yli 164 cm pitkiä.

Vastaus

- a) alle 144 cm
b) yli 164 cm

9.2

- a) Kuvion 2 perusteella $a = 8$.
- b) Kuvion 3 perusteella $a = 14$.
- c) Kuvion 1 perusteella $a = 12$.

Vastaus

- a) $a = 8$
- b) $a = 14$
- c) $a = 12$

9.3

- a) Määritettävän massavälin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmiin puolin.

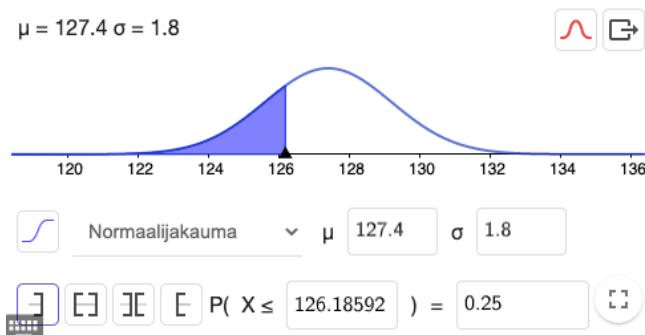
Massavälillä tulee olla 50 % mittaustuloksista, joten välin ulkopuolella on 50 % mittaustuloksista. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella

on $\frac{50\%}{2} = 25\%$ mittaustuloksista.

Merkitään satunnaisesti valittua mittaustulosta grammoina kirjaimella X .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a .

$$\mu = 127.4 \quad \sigma = 1.8$$

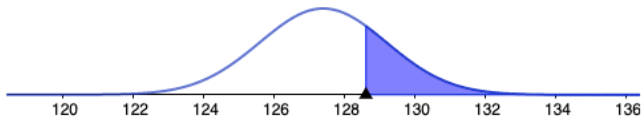


$$P(X < a) = 0,25, \text{ kun } a \approx 126,2$$

Alaraja on 126,2 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b .

$\mu = 127.4$ $\sigma = 1.8$



Normaalijakauma μ 127.4 σ 1.8

$P(128.61408 \leq X) = 0.25$

$$P(X > b) = 0,25, \text{ kun } b \approx 128,6$$

Yläraja on 128,6 g.

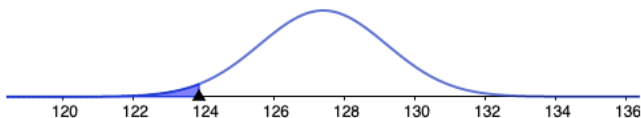
Massaväli on siis 126,2–128,6 g.

- b) Määritettävän massavälin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmin puolin.

Massavälillä tulee olla 95 % mittaustuloksista, joten välin ulkopuolella on 5 % mittaustuloksista. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella on $\frac{5\%}{2} = 2,5\%$ mittaustuloksista.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a .

$\mu = 127.4$ $\sigma = 1.8$



Normaalijakauma μ 127.4 σ 1.8

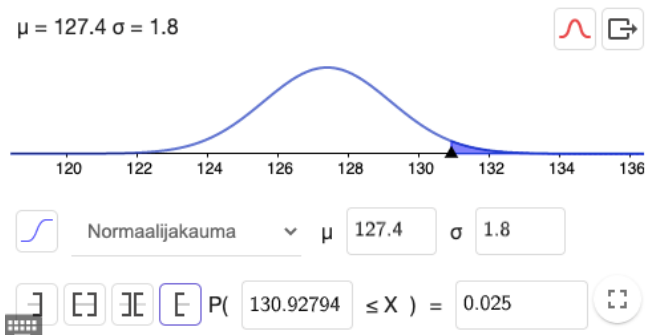
$P(X \leq 123.87206) = 0.025$

$$P(X < a) = 0,025, \text{ kun } a \approx 123,9$$

Alaraja on 123,9 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b .

$$\mu = 127.4 \quad \sigma = 1.8$$



$$P(X > b) = 0,025, \text{ kun } b \approx 130,9$$

Yläraja on 130,9 g.

Massaväli on siis 123,9–130,9 g.

Vastaus

a) 126,2–128,6 g

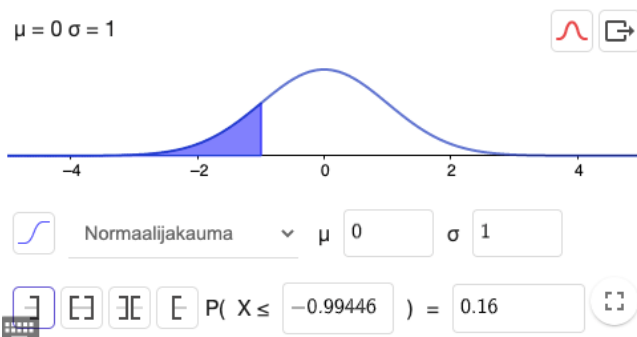
b) 123,9–130,9 g

9.4

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Satunnaismuuttuja Z noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.

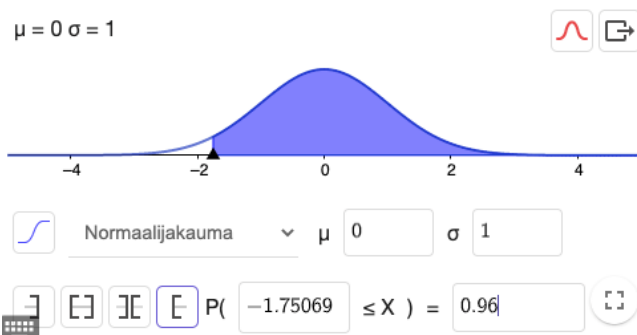
$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



$$P(X \leq a) = 0,16, \text{ kun } a \approx -0,99$$

b)

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



$$P(X \geq a) = 0,96, \text{ kun } a \approx -1,75$$

- c) Määritettävän välin ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmiin puolin.

Välillä tulee olla 60 % jakaumasta, joten välin ulkopuolella on 40 % jakaumasta. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella on 20 % jakaumasta.

Määritetään välin yläraja a .

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



Normaalijakauma μ 0 σ 1

$P(X \leq 0.84162) = 0.80$

$$P(X \leq a) = 0,80, \text{ kun } a \approx 0,84$$

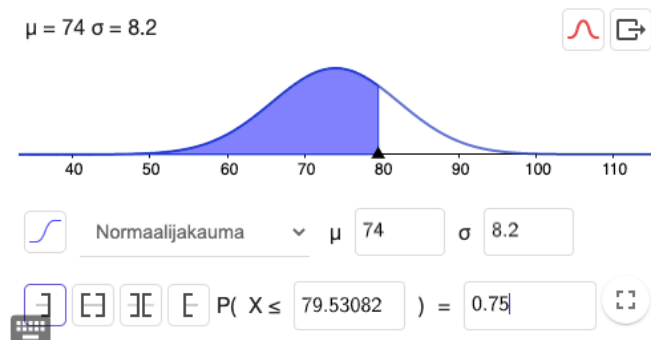
Vastaus

- a) $-0,99$
b) $-1,75$
c) $0,84$

9.5

- a) Merkitään satunnaisesti valittua soveltuvuuskokeen tulosta kirjaimella X . On määritettävä raja, jonka alapuolella on 75 % tuloksista, eli sellainen pituus a , että $P(X < a) = 0,75$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyysslaskurilla.



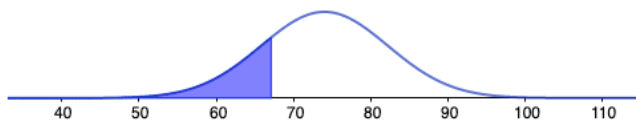
$$P(X < a) = 0,75, \text{ kun } a \approx 80$$

Hyväksymisrajan tulee olla 80 pistettä.

- b) On määritettävä raja, jonka alapuolella on 20 % tuloksista, eli sellainen pituus a , että $P(X < a) = 0,20$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyysslaskurilla.

$$\mu = 74 \quad \sigma = 8.2$$



Normaalijakauma



μ

74

σ

8.2



$P(X \leq$

67.09871

) =

0.20



$$P(X < a) = 0,20, \text{ kun } a \approx 67$$

Hyväksymisrajan tulee olla 67 pistettä.

Vastaus

- a) 80 pistettä
- b) 67 pistettä

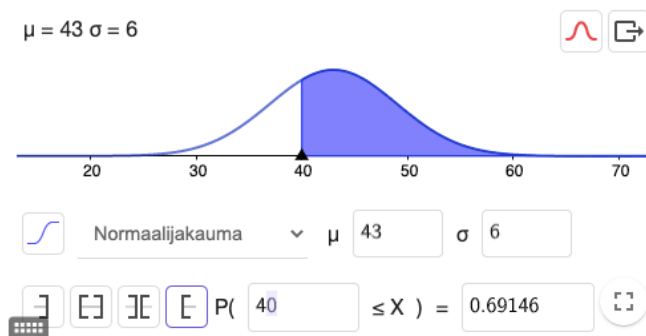
9.6 PUUTTUU

9.7

- a) Linja-auton matka-aika X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 43$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma = 6$ minuuttia.

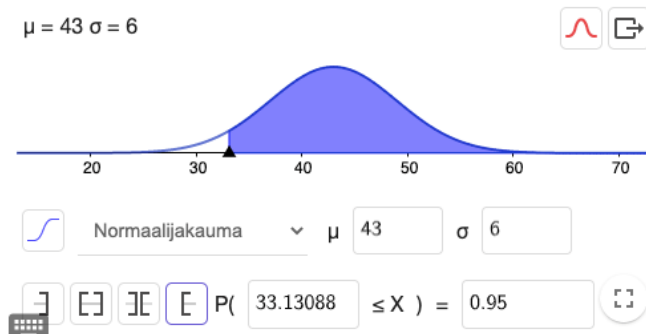
Jaana ehtii bussiin, jos linja-auton matka-aika on yli 40 minuuttia.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X > 40)$.



Saadaan $P(X > 40) \approx 0,69$.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen linja-auton matka aika a , että $P(X > a) = 0,95$.



$P(X > a) = 0,95$, kun $a \approx 33$.

Jaanan tulisi olla kotipysäkillä klo 7.33.

Vastaus

a) 0,66

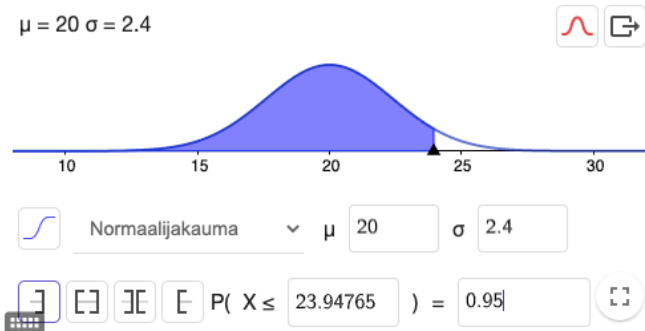
b) klo 7.33

9.8

Riittävä annos lääkettä X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 20,0 \text{ mg}$ ja keskihajonta $\sigma = 2,4 \text{ mg}$.

On määritettävä sellainen lääkeannoksen suuruus, että se riittää parantamaan 95 % kissoista eli että 95 % kissoista jää tämän rajan alapuolelle.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen annoksen suuruus a , että $P(X \leq a) = 0,95$.



$P(X \leq a) = 0,95$, kun $a \approx 23,9$.

Annoksen suuruuden tulee olla 23,9 mg.

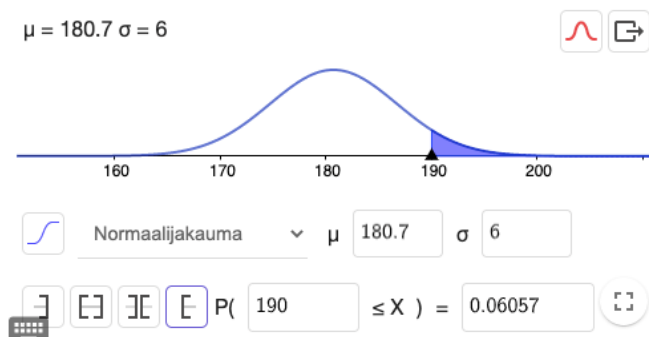
Vastaus

23,9 mg

9.9

- a) Täysikasvuisen miehen pituus X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 180,7 \text{ cm}$ ja keskihajonta $\sigma = 6,0 \text{ cm}$.

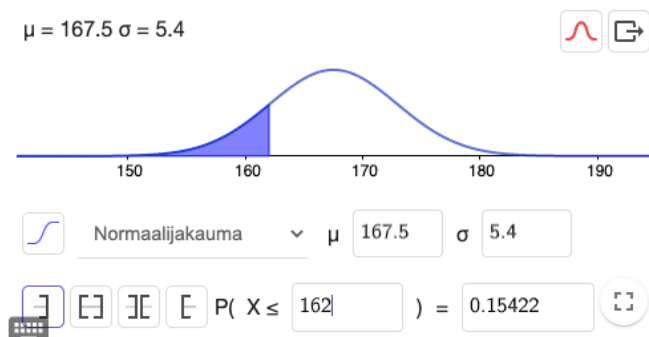
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X \geq 190)$.



Saadaan $P(X \geq 190) \approx 0,061$.

- b) Täysikasvuisen naisen pituus Y noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 167,5 \text{ cm}$ ja keskihajonta $\sigma = 5,4 \text{ cm}$.

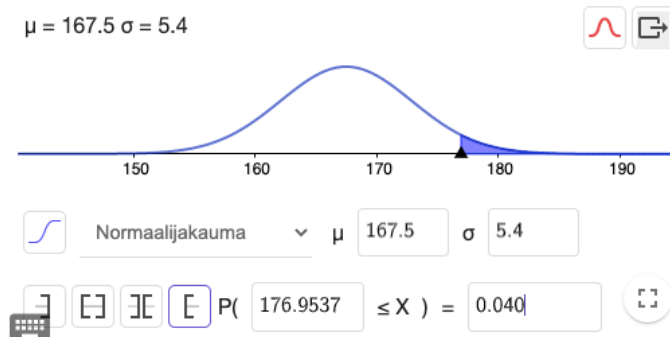
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(Y < 162)$.



Saadaan $P(Y < 162) \approx 0,15$.

15 % kaikista täysikasvuista suomalaisista naisista on pituudeltaan alle 162 cm.

- c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen pituus L , että $P(Y > L) = 0,040$.



$$P(Y > L) = 0,040, \text{ kun } L \approx 177$$

Pituuden L tulee olla 177 cm.

Vastaus

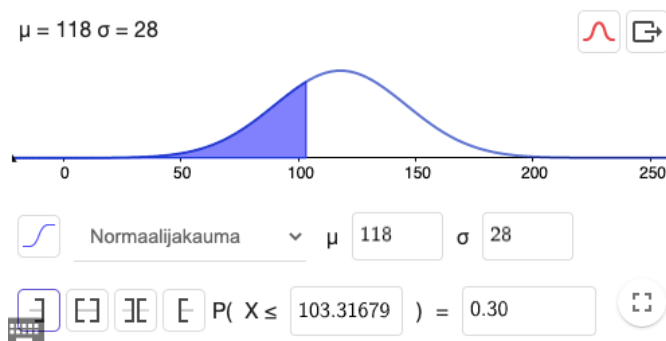
- a) 0,061
- b) 15 %
- c) $L \approx 177$ cm

9.10

Merkitään satunnaisesti valitun soveltuvuuskokeen pistemäärää kirjaimella X .

On määritettävä raja, jonka alapuolella on 30 % pistemääristä, eli sellainen pistemäärä a , että $P(X \leq a) = 0,30$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



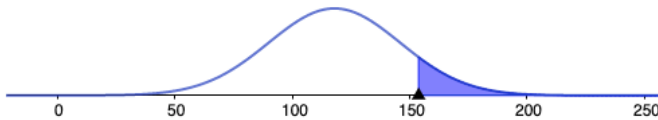
$$P(X \leq a) = 0,30, \text{ kun } a \approx 103$$

Heikoimmat 30 % saavat enintään 103 pistettä.

On määritettävä raja, jonka yläpuolella on 10 % pituuksista, eli sellainen pituus a , että $P(X \geq a) = 0,10$.

Määritetään raja a GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

$\mu = 118$ $\sigma = 28$



Normaalijakauma μ 118 σ 28

$P(153.88344 \leq X) = 0.10$

$P(X \geq a) = 0,10$, kun $a \approx 154$

Parhaat 10 % saavat ainakin 154 pistettä.

Vastaus

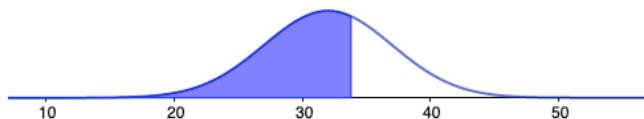
103 pistettä ja 154 pistettä

9.11

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 32 ja keskihajonta 5.

$$\mu = 32 \quad \sigma = 5$$



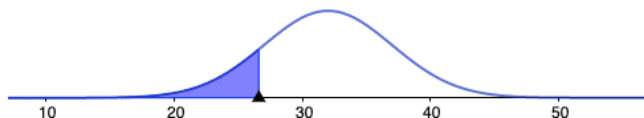
 Normaalijakauma μ 32 σ 5

    $P(X \leq 33.79229) = 0.64$ 

$$P(X \leq a) = 0,64, \text{ kun } a \approx 33,8.$$

b)

$$\mu = 32 \quad \sigma = 5$$



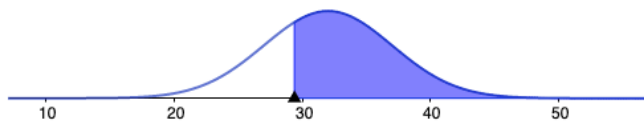
 Normaalijakauma μ 32 σ 5

    $P(X \leq 26.5984) = 0.14$ 

$$P(X < a) = 0,14, \text{ kun } a \approx 26,6$$

c)

$$\mu = 32 \quad \sigma = 5$$



Normaalijakauma



μ

32

σ

5



P(29.378

$\leq X$

) =

0.70



$$P(X \geq a) = 0,70, \text{ kun } a \approx 29,4$$

Vastaus

a) 33,8

b) 26,6

c) 29,4

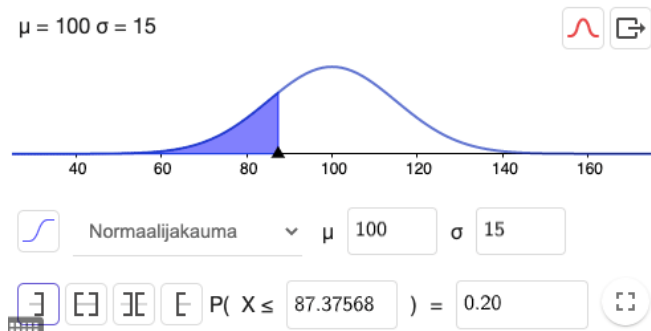
9.12

Normaalin älykkyyden ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmiin puolin.

Normaalin älykkyyden välillä tulee olla 60 % mittaustuloksista, joten välin ulkopuolella on 40 % mittaustuloksista. Siten sekä välin alapuolella että yläpuolella on $\frac{40\%}{2} = 20\%$ mittaustuloksista.

Merkitään satunnaisesti valittua testitulosta kirjaimella X .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a .

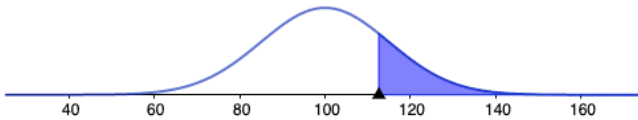


$$P(X < a) = 0,20, \text{ kun } a \approx 87$$

Alaraja on 87.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b .

$\mu = 100$ $\sigma = 15$



Normaalijakauma μ 100 σ 15

$P(112.62432 \leq X) = 0.20$

$P(X > b) = 0,20$, kun $b \approx 113$

Yläraja on 113.

Normaalin älykkyyden testitulos on 87–113.

Vastaus

alaraja 87, yläraja 113

9.13

- a) Kuvion 1 perusteella $a = -0,5$.
- b) Kuvion 2 perusteella $a = 1,0$.
- c) Kuvioden 1 ja 2 perusteella $a = 1,0$.
- d) Kuvion 3 perusteella $a = 0,72 \approx 0,7$.

Vastaus

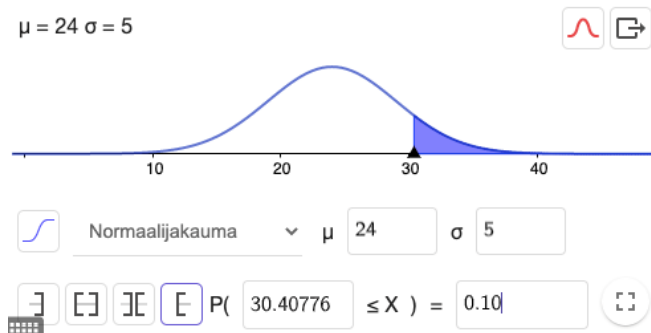
- a) $a = -0,5$
- b) $a = 1,0$
- c) $a = 1,0$
- d) $a \approx 0,7$

9.14

Selman koulumatkan kesto X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 24$ minuuttia ja keskihajonta $\sigma = 5$ minuuttia.

Tapa 1. On määritettävä sellainen koulumatkan kesto, että vain 10 % koulumatkoista kestävät sitä kauemmin.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen koulumatkan kesto a , että $P(X > a) = 0,10$.



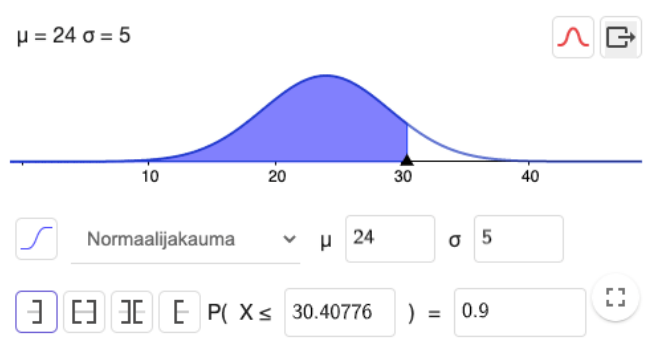
$P(X > a) = 0,10$, kun $a \approx 30$.

Selman on lähdettävä kotoa 30 minuuttia ennen koulun alkua.

Tapa 2. On määritettävä sellainen koulumatkan kesto, että 90 % koulumatkoista ovat sitä lyhempiä.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen koulumatkan kesto a , että $P(X < a) = 0,90$.

$$\mu = 24 \quad \sigma = 5$$



$$P(X < a) = 0,90, \text{ kun } a \approx 30.$$

Selman on lähdeittävä kotoa 30 minuuttia ennen koulun alkua.

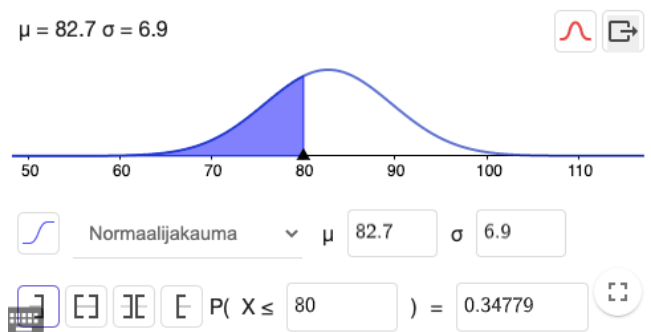
Vastaus

30 minuuttia

9.15

- a) Satunnaisesti valitun auton nopeus X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 82,7$ km/h ja keskihajonta $\sigma = 6,9$ km/h.

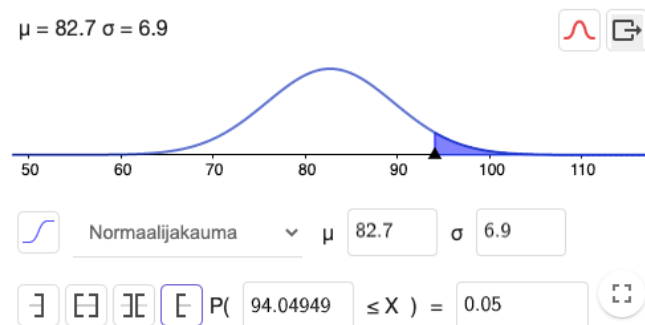
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(X \leq 80)$.



Saadaan $P(X \leq 80) \approx 0,35$.

Nopeusrajoitusta 80 km/h noudatti 35 % autoilijoista.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen nopeus a , että $P(X \geq a) = 0,05$.



$P(X \geq a) = 0,05$, kun $a \approx 94$.

Hätäisimmät 5 % ajoivat yli 94 km/h.

Vastaus

a) 35 %

b) yli 94 km/h

9.16

Normaalin näppäryyden ala- ja ylärajan tulee sijaita symmetrisesti keskiarvon molemmiin puolin.

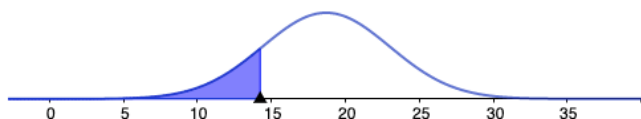
Normaalin näppäryyden välillä tulee olla 70 % testituloksista, joten välin ulkopuolella on 30 % testituloksista. Siten sekä välin alapuolella että

yläpuolella on $\frac{30\%}{2} = 15\%$ testituloksista.

Merkitään satunnaisesti valittua testitulosta kirjaimella X .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin alaraja a .

$\mu = 18.7$ $\sigma = 4.3$



Normaalijakauma μ 18.7 σ 4.3

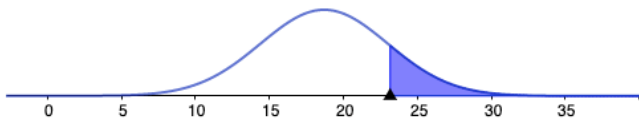
$P(X \leq 14.24334) = 0.15$

$$P(X < a) = 0.15, \text{ kun } a \approx 14.2$$

Alaraja on 14,2 s.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla välin yläraja b .

$$\mu = 18.7 \quad \sigma = 4.3$$




 Normaalijakauma μ σ





 $P(23.15666 \leq X) = 0.15$


$$P(X > b) = 0,15, \text{ kun } b \approx 23,2$$

Yläraja on 23,2 s.

Normaalinäppärien suoritus aika on välillä 14,2–23,2 s.

Vastaus

14,2–23,2 s

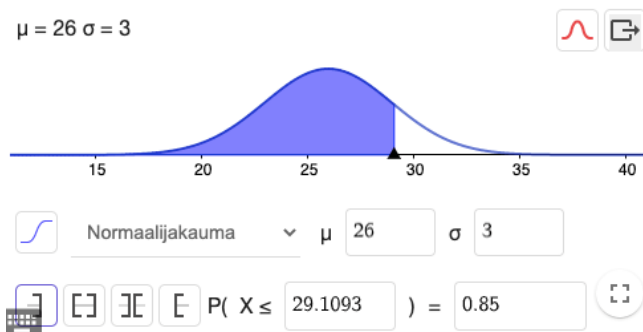
9.17

- a) Riittävä annos lääkettä X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 26,0 \text{ mg}$ ja keskihajonta $\sigma = 3,0 \text{ mg}$.

On määritettävä sellainen lääkeannoksen suuruus, että se riittää parantamaan 85 % koirista eli että 85 % koirista jää tämän rajan alapuolelle.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen annoksen suuruus a , että $P(X \leq a) = 0,85$.

$$\mu = 26 \quad \sigma = 3$$

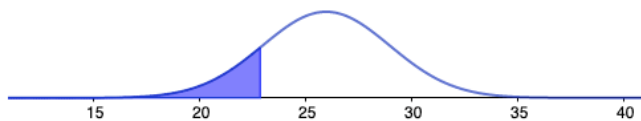


$$P(X \leq a) = 0,85, \text{ kun } a \approx 29,1.$$

Annoksen suuruuden tulee olla 29,1 mg.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen annoksen suuruus a , että $P(X \leq a) = 0,15$.

$$\mu = 26 \quad \sigma = 3$$



Normaalijakauma



μ

26

σ

3



$P(X \leq$

22.8907

) =

0.15



$P(X \leq a) = 0,15$, kun $a \approx 22,9$.

Annoksen suuruuden tulee olla 22,9 mg.

Vastaus

a) 29,1 mg

b) 22,9 mg

9.18

- a) Merkitään satunnaisesti valitussa kanassa esiintyvien punkkien lukumäärää kirjaimella X .

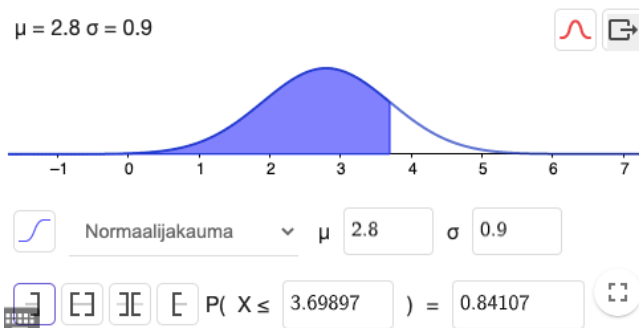
$\log_{10} X$ noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 2,8$ ja keskihajonta $\sigma = 0,9$.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla

$$P(\log_{10} X \leq \log_{10} 5000).$$

$$\log_{10} 5000 \approx 3,69897$$

$$\mu = 2.8 \quad \sigma = 0.9$$

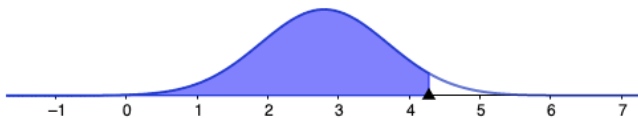


Saadaan $P(\log_{10} X \leq \log_{10} 5000) \approx 0,84$.

Alle 5000 punkkia on 84 %:lla kanoista.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen logaritmin arvo a , että $P(\log_{10} X < a) = 0,95$.

$$\mu = 2.8 \quad \sigma = 0.9$$



$$P(X \leq 4.28037) = 0.95$$

$$P(\log_{10} X < a) = 0.95, \text{ kun } a \approx 4.28037.$$

Ratkaistaan punkkimäärä X .

$$\log_{10} X \approx 4.28037$$

$$X \approx 10^{4.28037}$$

$$\approx 19\,000$$

95 % kanoista jää punkkimäärän 19 000 alapuolelle.

Vastaus

a) 84 %

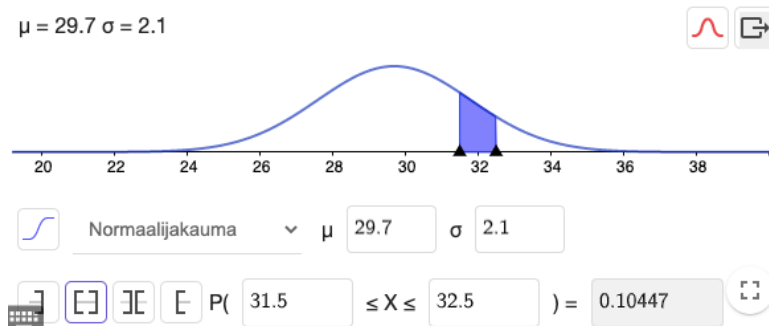
b) 19 000

9.19

- a) Satunnaisesti valitun asiakkaan housujen pituus X noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo $\mu = 29,7$ tuumaa ja keskihajonta $\sigma = 2,1$ tuumaa.

Housujen koko 32 kattaa välin 31,5–32,5.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla $P(31,5 \leq X < 32,5)$.



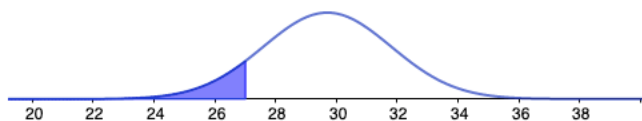
Saadaan $P(31,5 \leq X < 32,5) \approx 0,10$.

10 %:lla asiakkaista housujen koko on 32.

- b) Määritettävän kokovälin alapuolella on 10 % ja yläpuolella 10 % asiakkaista.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen housujen koko a , että $P(X < a) = 0,10$.

$$\mu = 29.7 \quad \sigma = 2.1$$



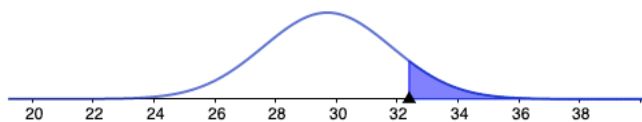
$$P(X \leq 27.00874) = 0.10$$

$$P(X < a) = 0.10, \text{ kun } a \approx 27.$$

Välin alaraja on 27.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla sellainen housujen koko b , että $P(X > b) = 0.10$.

$$\mu = 29.7 \quad \sigma = 2.1$$



$$P(32.39126 \leq X) = 0.10$$

$$P(X > b) = 0.10, \text{ kun } b \approx 32.$$

Välin yläraja on 32.

Housujen koot ovat välillä 27–32.

Vastaus

a) 10 %

b) 27–32